Exercices détaillés de colles MP

Gaëtan Douéneau-Tabot
gaetan.doueneau@ens-paris-saclay.fr

14 avril 2020

Résumé

J'ai donné ces exercices en MP1 à St Louis entre 2018 et 2020, les élèves les ont plutôt appréciés. Ils sont en général assez détaillés, et relativement peu calculatoires ("le calcul, on peut toujours en faire chez soi"). Mon projet est d'écrire les corrections, mais c'est tellement agréable que je le retarde pour en profiter plus tard.

Table des matières

1 Structures algébriques

1.1 Groupes

Exercice 1. Morphismes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$

Trouver tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +, 0)$ dans $(\mathbb{Z}, +, 0)$.
Indication : commencer par regarder l'image.

Exercice 2. Isomorphismes ?

Les groupes $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ et $\langle \mathbb{R}_+^*, \times \rangle$ sont-ils isomorphes ? Et $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ et $\langle \mathbb{R}^*, \times \rangle$?

Exercice 3. Introduction au produit interne

Soit G un groupe fini, H, K deux sous groupes de G. On note $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que $|HK||H \cap K| = |H| \times |K|$. *Indication : introduire $f : (h, k) \mapsto hk$.*
2. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 4. Groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini

1. Soit G un groupe fini, pourquoi n'a-t-il qu'un nombre fini de sous-groupes ?
2. Réciproquement, soit G un groupe n'ayant qu'un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini. *Indication : que dire de $\langle x \rangle$ pour $x \in G$?*

Exercice 5. Exposant d'un groupe abélien fini

Soit G un groupe abélien fini.

1. Soient $x, y \in G$ d'ordres respectifs m et n avec $m \wedge n = 1$. Quel est l'ordre de xy ?
2. Soient $m, n \geq 0$ et pas nécessairement premiers entre eux.
   (a) Trouver m' et n' tels que $m' \wedge n' = 1$ et $m'n' = m \vee n$.
   (b) Si $x, y \in G$ sont d'ordres respectifs m et n, montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre $m \vee n$.
3. En déduire qu'il existe $x \in G$ d'ordre $n_G \geq 0$, tel que $\forall y \in G$, l'ordre de y divise n_G. *On dit que n_G est l'exposant du groupe G.*
4. Soit $k \geq 0$ premier avec n_G. Établir que l'application $f_k : G \to G, x \mapsto x^k$ est un automorphisme de groupes. Le résultat reste-t-il vrai si $k \wedge n_G \neq 1$?

Exercice 6. Propriété universelle du produit de groupes

1. Soient $\langle G_1, \top, e_2 \rangle$ et $\langle G_2, \perp, e_2 \rangle$ deux groupes. On définit leur produit $\langle G_1 \times G_2, *, (e_1, e_2) \rangle$ où $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 \top y_1, x_2 \perp y_2)$. Montrer que $G_1 \times G_2$ est un groupe.
2. On pose $\pi_1 : \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array}$ et $\pi_2 : \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array}$.
   Justifier que π_1 et π_2 sont des morphismes de groupes surjectifs.
3. Soit $(H, \bullet, 1)$ un groupe et $f_1 : H \to G_1$ et $f_2 : H \to G_2$ deux morphismes de groupes. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $h : H \to G_1 \times G_2$ telle que $\pi_1 \circ h = f_1$ et $\pi_2 \circ h = f_2$. *On pourra raisonner par analyse-synthèse.*
4. Faire un dessin de la construction. On représentera les morphismes π_1, π_1, f_1, f_2 et h par des flèches entre les groupes $G_1, G_2, G_1 \times G_2$ et H.

1.2 Anneaux

Exercice 7. Indicateur d'Euler

On note $\phi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Rappeler à quelle condition sur $k \geq 0$ on a $k \mod n$ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   En déduire $\phi(p)$ pour p premier puis $\phi(p^\alpha)$ avec $\alpha \geq 1$.
2. Soient $m, n \geq 1$ et premiers entre eux.
   Justifier que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ k \mod mn & \longmapsto & (k \mod m, k \mod n) \end{array}$
   est bien définie et est un isomorphisme d'anneaux.
   En déduire que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
3. Si $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ (décomposition primaire), donner une expression de $\phi(n)$.

Exercice 8. Nilradical d'un anneau

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif. Un élément $x \in \mathbb{A}$ est dit nilpotent s'il existe $n \geq 0$ tel que $x^n = 0$. On note N l'ensemble des nilpotents de $\mathbb{A}$. Établir que N est un idéal de $\mathbb{A}$.

Exercice 9. Radical d'un idéal

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif et I un idéal de $\mathbb{A}$. On note $R(I)$ l'ensemble des $x \in I$ tels qu'il existe $n \geq 0$ avec $x^n \in I$.

1. Justifier que $R(I)$ est un idéal de $\mathbb{A}$ contenant I.
2. Montrer que si I, J sont deux idéaux alors $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$.
3. On suppose que $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Quels sont les idéaux de $\mathbb{A}$?
   Montrer que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ si et seulement si n est sans facteur carré.

Exercice 10. Anneaux noetheriens

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif.

1. Soit $n \geq 0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$ et $I = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{A}\}$.
   Justifier que I est un idéal. *Les idéaux de cette forme sont dits de type fini.*
2. (a) On suppose que tout idéal de $\mathbb{A}$ est de type fini. Soit $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{A}$. Montrer qu'elle est stationnaire.
   Indication : que dire de $\bigcup_{n\geq 0} I_n$?
   (b) On suppose que $\mathbb{A}$ possède un idéal I qui n'est pas de type fini. Construire une suite croissante d'idéaux (inclus dans I) qui n'est pas stationnaire.
3. Que dire d'une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{Z}$?

1.3 Corps

Exercice 11. Symbole de Legendre

Soit $p \geq 2$ un nombre premier. On note C l'ensemble des carrés de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

1. Que dire de $|C|$ si $p = 2, 3, 5, 7$? Pour $p \neq 2$, montrer que $|C| = \frac{p-1}{2}$.
   Indication : faire apparaître un morphisme bien choisi.
2. En déduire que $x \mod p$ est dans C si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} \mod p = 1 \mod p$.

Exercice 12. Sous-corps premier

Quel est le plus petit sous-corps (pour l'inclusion) de $\mathbb{R}$? de $\mathbb{Q}$?

Exercice 13. Automorphismes de corps

1. (a) Déterminer tous les endomorphismes de corps de $\mathbb{Q}$.
   (b) Déterminer tous les endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$ qui sont continus.
2. Déterminer tous les endomorphismes de corps de $\mathbb{C}$ qui sont l'identité sur $\mathbb{R}$.

2 Fonctions réélles

2.1 Développements limités

Exercice 14. Développements limités en vrac

1. Donner le DL en 0 de $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ à l'ordre 4.
2. Donner le DL en 0 de $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$ à l'ordre 4.
3. Donner le DL en 1 de $x \mapsto x^{1/(\ln(x)-1)}$ à l'ordre 4.
4. Donner le DL en 0 de $(x^{12})^2 + x^2$ à l'ordre 30.

Exercice 15.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Exercice 16. Suite implicite $x_n = c/\tan(x_n)$

Soit $f(x) = x\sin(x) - c\cos(x)$, on s'intéresse aux zéros de f.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
   (b) Peut-il y avoir des solutions dans les intervalles $[n\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi]$?
2. Donner un équivalent de x_n.
3. On note $u_n = x_n - n\pi$.
   (a) Exprimer $f(x_n)$ en fonction de u_n et simplifier l'expression.
   (b) En déduire que $u_n = \arctan\left(\dfrac{c}{n\pi + u_n}\right)$.
   (c) Donner un équivalent de u_n et conclure que $x_n = n\pi + \dfrac{c}{n\pi} + o(\dfrac{c}{n\pi})$.

Exercice 17. Vers 0

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$.

1. Donner un développement de Taylor de f en 0 à l'ordre 1.
2. Soit $l > 0$, on note $S_n := \sum_{k=0}^{nl} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
   Expliquer "vaguement et avec les mains" [1] pourquoi $S_n \simeq \frac{f'(0)l^2}{2}$ pour n grand.
3. Démontrer que $\lim S_n = \frac{f'(0)l^2}{2}$. *Indication : fixer un $\eta > 0$ tel que $|f(x) - xf'(0)| < \epsilon x$ pour $|x| < \eta$, puis formaliser le raisonnement précédent..*

2.2 Continuité et dérivation

Exercice 18. Rolle généralisé

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et n fois dérivable sur $]a, b[$s'annulant en $n + 1$ points distincts. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.
2. Application. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est fonction continue et 2 fois dérivable telle que $f'' > 0$, alors f possède au plus deux points fixes.

1. Comme en physique.

Exercice 19. **Théorème de Darboux**

Soit I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$, $a < b \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $g'(a) \geq 0$ et $g'(b) \leq 0$. Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $g'(x) = 0$. *Indication : faire apparaître un extremum de g.*
2. On suppose que $g'(a) \leq g'(b)$. Montrer que pour tout $y \in [g'(a), g'(b)]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $g'(x) = y$.

2.3 Intégrale sur un segment

Exercice 20. **Majoration**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $M = \sup_{t\in[a,b]} f'(t)$.

1. Etablir $|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$.
2. Montrer qu'en fait $|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 21. **Inégalité de Young (encore une)**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, strictement croissante, et telle que $f(0) = 0$.

1. Justifier que $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\forall x \geq 0, \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$.
   On pourra introduire une quantité à dériver.
3. Soit $b \geq 0$ et $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\mathrm{d}t - xb$.
   (a) Que vaut $\phi(f^{-1}(b))$?
   (b) Justifier que ϕ est dérivable. Que vaut $\phi'(x)$? Etudier son signe.
   (c) En déduire que $\forall x \neq f^{-1}(b)$, $\phi(x) > 0$.
   (d) Conclure que $\forall a, b \geq 0, \mapsto \int_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\mathrm{d}t \geq ab$.
   Quand l'égalité se produit-elle ?

Exercice 22. **Formule de la moyenne**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et positive (pondération).

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 23. **Sommes de Riemann**

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que la suite $u_n := \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ converge et calculer sa limite.
2. Soit $\alpha \geq 1$, montrer que $\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

2.4 Convexité

Exercice 24. Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \geq 0$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, justifier que $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 25. Convexité à petits pas

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
Pour $[a, b] \subseteq I$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on note $f_\mu^{[a,b]}$ la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + \mu x$

1. Montrer que si f est convexe, alors pour tout $[a, b] \subseteq I$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $f_\mu^{[a,b]}$ est bornée et atteint sa borne supérieure en a ou en b.
2. Établir la réciproque. *Indication : fixer $a < b$ et choisir judicieusement μ.*

Exercice 26. Convexe et majorée

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer qu'elle est constante.
   On pourra faire un dessin.
2. Le résultat reste-t-il vrai si f est seulement définie sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 27. Étude asymptotique d'une fonction convexe

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $f(x)/x$ tend en $+\infty$ vers une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
   Trouver des exemples de fonctions convexes pour lesquelles $l = +\infty, = 0, > 0, < 0$.
2. Montrer que si $l \leq 0$ alors f est décroissante.
3. Justifier que $f(x) - lx$ tend vers une limite $l' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice 28. log-convexité, stabilité par somme

On dit que que $f : I \to]0, +\infty[$ est log-convexe si $\log f$ est convexe.

1. Justifier que si f est log-convexe, elle est convexe.
2. Montrer que si f est log-convexe, alors $x \mapsto f(x)c^x$ est convexe pour tout $c > 0$.
   On pourra utiliser la question précédente.
3. On suppose que $x \mapsto f(x)c^x$ est convexe pour tout $c > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$ et $c > 0$ on a :
   $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}$ avec $\alpha = c^{a-b}$.
   (b) En déduire que f est log-convexe.
4. Montrer que si f, g sont log-convexes, $f + g$ aussi.

3 Topologie

3.1 Notions de base en topologie

Exercice 29. Valeurs d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^n$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{3n} \to 0$.

1. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, alors $-2a$ aussi.
2. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 30. Dense dans son enveloppe

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall x, y \in A$, $\frac{x+y}{2} \in A$.
Montrer que A est dense dans $\mathrm{Conv}(A)$.

Exercice 31. Convexité de la distance

Soit E un espace vectoriel normé et $C \neq \varnothing$ une partie convexe de E.
On définit la distance à C par $d_C : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \inf_{y\in C} d(x, y)$.

1. Montrer que d_C est convexe.
2. Cela reste-t-il vrai dans le cas où C n'est pas convexe ?

Exercice 32. Complétude, fermés emboités et théorème de Baire

On se place dans l'espace $E := \mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle.

1. Une suite $(u_p)_{p\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall p, q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.
   (a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
   (b) Montrer la réciproque. *Indication : une suite de Cauchy est-elle bornée ?*
2. Soit une suite de boules $\overline{B(x_0, \epsilon_0)} \supseteq \overline{B(x_1, \epsilon_1)} \supseteq \cdots$ de diamètres $\epsilon_p \to 0$.
   Montrer que $\cap_{p\geq 0}\overline{B(x_p, \epsilon_p)}$ est un singleton $\{y\}$. *Indication : suite de Cauchy.*
3. Soit $(U_p)_{p\geq 0}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall p \geq 0, \overline{U_p} = E$ (ouvert dense).
   (a) On fixe $x_0 \in E$, $\epsilon > 0$.
   Montrer qu'il existe $x_1 \in E, \eta > 0$ tels que $\overline{B(x_0, \eta)} \subseteq O_0 \cap B(x_0, \epsilon)$.
   (b) En construisant une suite de boules, montrer qu'il existe $y \in B(x, \epsilon) \cap (\cap_{p\geq 0} O_p)$.
   Indication : on cherchera à construire une suite de boules, pour utiliser 2.
   (c) En déduire que $\overline{\cap_{p\geq 0} O_p} = E$.

3.2 Topologie et continuité

Exercice 33. Préimage d'un segment

Soit $K \subseteq \mathbb{R}$, $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $I \subseteq f(\mathbb{R})$ un segment.
Montrer qu'il existe un segment $J \subseteq \mathbb{R}$ tel que $f(J) = I$.

Exercice 34. Continuité et convexité

Montrer qu'une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in I, f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Pour la réciproque, on raisonnera par l'absurde et on se ramènera à $f(a) = f(b) = 0$.

3.3 Compacité

Exercice 35. Partie compacte stable par produit

Soit $K \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une partie compacte (pour la topologie sur les matrices), stable par produit ($A, B \in K \Rightarrow AB \in K$). Montrer que K est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Indication : montrer d'abord que l'on a l'identité dans K.

Exercice 36. Point fixe dans un compact

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

Soit $f : K \to K$ une application continue telle que $\forall x \neq y \in K$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe, noté α.
2. Soit $x_0 \in K$ quelconque. On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que $x_n \to_{+\infty} \alpha$. *Indication : commencer par regarder $d(\alpha, x_n)$.*

Exercice 37. Distance entre parties

1. Soient L, K deux compacts *disjoints* d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que $d(L, K) := \inf_{x \in L, y \in K} d(x, y) > 0$.
2. Cela reste-t-il vrai si l'un des deux n'est pas compact ?

Exercice 38. Rangs et matrices

1. Justifier pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Plus généralement, que dire de l'ensemble $\mathcal{R}_p$ des matrices de rang au moins p ? Et pour les matrices de rang au plus p ?

3.4 Convexité

Exercice 39. Convexité de la distance

Soit E un espace vectoriel normé et $C \neq \varnothing$ une partie convexe de E.

On définit la distance à C par $d_C : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \inf_{y \in C} d(x, y)$.

1. Montrer que d_C est convexe.
2. Cela reste-t-il vrai dans le cas où C n'est pas convexe ?

Exercice 40. Théorème de Carathéodory

Soit A une partie d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Rappeler la caractérisation de $\mathrm{Conv}(A)$ en termes de barycentres.
2. (a) Établir que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de familles de $n + 1$ points de A.
   (b) Pourrait-on utiliser seulement des familles de n points ?
3. On suppose que A est compacte. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.
   Indication : utiliser ce qui précède.

4 Intégrales généralisées

4.1 Intégrabilité

Exercice 41. **Critère de d'Alembert pour l'intégrabilité**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et positive, on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = l < 1$.

Montrer que f est intégrable.

Exercice 42. **Intégrales de Bertrand**

Discuter, en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ sur $[e, +\infty[$.

Exercice 43. **"Réciproques" de Riemann**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

1. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$?
2. f a-t-elle une limite ? Si oui laquelle ?
3. On suppose de plus que f est décroissante et positive. Montrer que $f(x) = o(1/x)$.
4. Ici f est décroissante positive mais seulement de carré intégrable.

   Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{O}(\sqrt{x})$.

4.2 Convergence et calculs d'intégrales

Exercice 44.

1. Calculer $J := \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t$.
2. Justifier que $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$.
3. En factorisant t^4+1 par $t^2 - \sqrt{2}t + 1$, relier I et J et en déduire $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Exercice 45.

Soient $a, b > 0$. On note $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\mathrm{d}t$.

Justifier l'existence de cette intégrale, puis calculer sa valeur.

Indication : décomposer $\frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$ *en fonction de* $\frac{1}{t^2+a^2}$ *et* $\frac{1}{t^2+b^2}$.

Exercice 46. **Suite d'intégrales à calculer**

Pour $n \geq 0$, calculer $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t$.

Exercice 47. **Intégrale de Dirichlet**

1. Justifier que l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(t))\mathrm{d}t$ est bien définie.
2. En utilisant une expression de $2\sin(x/2)\cos(x/2)$, calculer sa valeur.

Exercice 48. **Sommes de Riemann non-continues**

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

4.3 Convergence dominée

Exercice 49. **Limite d'une suite d'intégrales**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t$?

Exercice 50. **Limite d'une suite d'intégrales (2)**

Soit $n \geq 0$, on note $I_n := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\mathrm{d}t$.

Justifier l'existence et déterminer la limite éventuelle de I_n.

Exercice 51. **Limite d'une suite d'intégrales (3)**

Soit $n \geq 0$, on note $I_n := \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

Justifier l'existence et déterminer la limite éventuelle de I_n.

Exercice 52. **Suite d'intégrales et développement limité**

Pour $n \geq 2$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que $I_n = \int_0^1 \frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\mathrm{d}t$.
2. En déduire que $I_n = 1 + \mathrm{o}(1/n)$. *Indication : faire apparaître le* 1, *puis des* $\frac{1}{n}$...

4.4 Intégrales à paramètres

Exercice 53.

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En remarquant que $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+u^3}\mathrm{d}u$, calculer cette valeur.
3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Exercice 54.

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x\mathrm{d}t$.

1. Etudier le domaine de définition de f.
2. Montrer qu'elle est dérivable et calculer explicitement sa dérivée.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 55. **Une fonction de deux variables**

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-ty}}{t} dt$ pour $x, y > 0$.

Exercice 56.

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt$.

Exercice 57. **Limites des normes**

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha dt \right)^{1/\alpha}$.

Exercice 58. **Transformée de Fourier**

Soit $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1 + t^2} dt$.

1. Etudier l'ensemble de définition et la continuité de ϕ.
2. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Justifier que $\phi'(x) = i \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1 + t^2} dt$.
3. (a) Montrer que $\phi'(x) = i \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{u^2 + x^2} du$.
   (b) En déduire que $\phi'(x) \sim_0 i \ln(x)$.
   Indication : commencer par découper l'intégrale entre 0 *et* 1 *;* 1 *et* $+\infty$.
   (c) ϕ est-elle dérivable en 0 ?

4.5 Divers

Exercice 59. **Lemme de Hadamard**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)/x$ si $x \neq 0$, $f'(0)$ sinon ; est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 60. **Translatés**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Notons $I(a) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t + a) - f(t)| dt$.

1. On veut montrer que $\lim_{a \to 0} I(a) = 0$.
   (a) Peut-on appliquer la convergence dominée ? *Contre-exemple ou preuve.*
   (b) Justifier que $\forall \epsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall a \in]-1, 1[$, $\int_{|t| \geq A} |f(t + a) - f(t)| \leq \epsilon$.
   (c) Conclure.
2. On suppose que f est nulle en dehors d'un compact.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I(a) = 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.
3. On ne fait plus d'hypothèses sur f.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |f(t + a) - f(t - a)| dt - \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = 0$
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I(a)$. *Commencer par un changement de variables.*

5 Séries numériques

5.1 Nature d'une série explicite

Exercice 61. Convergence de séries, en vrac

Etudier, pour $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général $u_n :=$

1. $\ln\left(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$;
2. $\ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$;
3. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$;
4. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$;
5. $\binom{n+p}{p}^{-\alpha}$ ($p \geq 0$ fixé) ;
6. $\sin(\pi\sqrt{n^{2\alpha}+1})$

Exercice 62.

Montrer que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ converge et donner un équivalent de son reste.

Exercice 63.

Nature de la série de terme général $a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}$ en fonction de $a \geq 0$ et $\alpha > 0$.

Exercice 64.

Nature de la série de terme général $\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^\alpha}$ en fonction $\alpha > 0$.

Exercice 65.

Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

Indication : on pourra faire apparaître une sous-série alternée.

5.2 Résultats de convergence généraux

Exercice 66. Règle de Raabe-Duhamel, ou d'Alembert à l'ordre 1

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes > 0 telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$.
   (a) On suppose $a > 1$. Comparer $(u_n)_{n\geq 0}$ à $(\frac{1}{n^b})$ pour un b bien choisi, et conclure que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
   (b) On suppose $a < 1$, montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
   (c) Montrer que si $a = 1$, on ne peut pas conclure.
   On pourra considérer la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{\log^\beta(n)}{n}$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \times \frac{n+a}{n+b}$ avec $a, b > 0$.
   Etablir une condition nécessaire sur $b - a$ pour que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge/diverge.

Exercice 67. Réciproque de Riemann

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
   Montrer que $u_n = o(1/n)$. *Indication : étudier le reste avec des ε.*
2. Donner un contre-exemple dans le cas où $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas positive et décroissante.

Exercice 68. Rapport aux autres, ou Riemann généralisé

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série divergente à termes >0 et $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose $u_n = \mathrm{o}(S_n)$.

1. Justifier que $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
2. En déduire la convergence $S := \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$ en fonction de α. Etablir un équivalent des sommes partielles dans le cas divergent, et du reste dans le cas convergent.
3. (a) Retrouver le critère de Riemann.
   (b) Que dire de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$?

Exercice 69. Critère de condensation de Cauchy

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite positive décroissante et $p \geq 1$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} p^n u_{p^n}$ converge.
2. (a) Que dire de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$?
   (b) Que dire de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$?

Exercice 70. Critère d'Abel et application aux séries de Dirichlet

1. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que :
   — $A_n := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$ est bornée ;
   — $b_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$;
   — $\sum_{k\geq 0} |b_{k+1} - b_k|$ converge.

   Montrer qu'alors $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ converge.
   Indication : modifier les sommes partielles pour faire apparaître des A_n.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la série $D(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$.
   (a) On suppose que $D(x_0)$ converge. Montrer que $D(x)$ converge pour $x > x_0$.
   Indication : on pourra écrire $\frac{a_n}{n^x} = \frac{a_n}{n^{x_0}} \times \frac{1}{n^{x-x_0}}$.
   (b) En déduire qu'il existe une *abscisse de convergence* $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $D(s)$ converge pour $x > \sigma$ et diverge pour $x < \sigma$.
   (c) Que vaut σ pour $a_n = 1$ (fonction ζ de Riemann) ?

5.3 Convergence commutative

Exercice 71. Tout sur la convergence commutative

On notera $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Justifier que $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge absolument. Quelle est sa limite ?
2. (a) Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sigma(n)}$ et de $\sum_{n\geq 0} \frac{\sigma(n)}{(\sigma(n))^2}$.
   (b) Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{\sigma(n)}{n^2}$. *Indication : étudier $S_{2n} - S_n$.*
3. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente.

(a) Que dire de $S(\sigma) := \sum_{n\geq 0} |u_n u_\sigma(n)|$? *Inégalités.*

(b) Déterminer $\sup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} S(\sigma)$.

Exercice 72. Réarrangement de Riemann faible

1. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série *semi-convergente*.
   Justifier qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = +\infty$.
2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série *commutativement convergente* (i.e. telle que $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$). Justifier que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

5.4 Familles sommables

Exercice 73. Ensembles dénombrables

Quels sont les ensembles dénombrables parmi :

1. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{P}_f(\mathbb{Q})$ (ensemble des parties finies de $\mathbb{Q}$) ;
3. $[0, 1]$.

Exercice 74.

Existence et valeur de $\sum_{p\geq 0, q\geq 1} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 75.

Pour quels $\alpha > 0$ la famille $\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$ est-elle sommable ? *Indication : encadrer.*

Exercice 76.

1. Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ quand la série $S_\alpha := \sum_{n\geq 1} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
2. Lorsque c'est possible, justifier que $S_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.

6 Suites et séries de fonctions

6.1 Suites de fonctions

Exercice 77. Convexité

Justifier que la limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

Exercice 78. Produit

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites de fonctions convergeant uniformément vers f et g des fonctions bornées. Montrer que $f_n g_n$ converge uniformément vers fg.

Exercice 79.

On définit pour $n \geq 1$ l'application $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle uniformément ? Simplement ?

Exercice 80.

On définit pour $n \geq 1$ l'application $u_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto n\sin(x)\cos^n(x)$.

1. Justifier la convergence simple de $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. A-t-on convergence uniforme ? *On pourra calculer l'intégrale* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x)\mathrm{d}x$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment dans $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 81. Taux d'accroissement

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
   Montrer que $(f_n := x \mapsto n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)])_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f'.
2. On suppose seulement que f est $\mathcal{C}_1$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. *Indication : utiliser l'uniforme continuité de f'.*

6.2 Suites de fonctions sur un compact

Exercice 82. Second théorème de Dini

Soit $I = [a, b]$ un segment et f_n une famille de fonctions croissantes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue.

1. Soit $\epsilon > 0$. Démontrer qu'il existe une suite de points $a = x_1 < \cdots < x_m = b$ tels que pour tout i, $|f(x_i) - f(x_{i+1})| < \epsilon$.
2. Montrer qu'il existe $N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \epsilon$.
3. En déduire une majoration en ϵ de $|f(x) - f_n(x)|$ pour tout $n \geq N$ et $x \in [a, b]$.
4. Conclure que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.

Exercice 83. Dini-eries

1. Soit $I := [a, b]$ un segment et f_n une famille de fonctions K-lipschitziennes convergeant simplement sur I vers une fonction f.

   (a) Démontrer que f est K-lipschitzienne (et donc continue).

(b) Soit $\epsilon > 0$ et suite de points $a = x_1 < \cdots < x_m = b$ tels que pour tout i, $|x_i - x_{i+1}| < \epsilon$. Montrer qu'il existe $N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \epsilon$.

(c) En déduire une majoration en K, ϵ de $|f(x) - f_n(x)|$ pour tout $n \geq N$ et $x \in [a, b]$.

(d) Conclure que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.

2. Soit $I := [a, b] \subseteq]\alpha, \beta[=: J$ un segment et f_n une famille de fonctions convexes convergeant simplement sur J vers une fonction f.

   (a) Soient $\alpha < a' < a$ et $b < b' < \beta$. Montrer que les suites $\left(\frac{f_n(a')-f_n(a)}{a'-a}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\frac{f_n(b)-f_n(b')}{b-b'}\right)_{n\geq 0}$ sont bornées (en valeur absolue) par un réel K.

   (b) Etablir que les fonctions f_n sont K-lipschitziennes sur $[a, b]$.

   (c) Que dire de la convergence de la suite f_n sur $[a, b]$?

3. On étudie la suite la suite de fonctions $(u_n : x \mapsto x^n)_{n\geq 0}$. Déterminer tous les segments $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ sur lesquels elle converge uniformément.

6.3 Séries de fonctions

Exercice 84.

On définit pour $n \geq 1$ l'application $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{n^2+x^2}$.
La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$ converge-t-elle simplement/uniformément/normalement sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 85. Manger des pissenlits

Soit $f := x \mapsto \sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Etudier le domaine de définition et la continuité de f.
2. Que vaut $\lim_{+\infty} f$?
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
   Indication : on pourra comparer à une intégrale.

6.4 Séries entières

6.4.1 Rayon de convergence

Exercice 86. Echauffement

Après avoir déterminé leurs rayons de convergence, sommer les séries suivantes.

1. $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$; 2. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$ (pour $x > 0$) ; 3. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

Exercice 87. Règle de Cauchy

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $\lim_n |a_n|^{1/n} = \lambda$.

1. Montrer que si $\lambda < 1$ (resp. $\lambda > 1$), alors $\sum a_n$ converge absolument (resp. diverge).
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(n!)x^n$.

Exercice 88. **Mises au carré**
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$?
2. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n^2 z^n$?

6.4.2 Opérations sur les séries entières

Exercice 89. **Somme de deux séries entières**
Soient $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $S'(z) := \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence r_a et r_b.

1. Pourquoi $S(z) + S'(z)$ est-elle développable en série entière avec $R \geq \min(r_a, r_b)$.
2. Cette borne est-elle toujours atteinte ?
3. On suppose en outre que $a_n b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $R = \min(r_a, r_b)$.

Exercice 90. **Inverse d'une série entière**

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non-nul si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \leq K^n$ pour tout $n \geq 0$.
2. Soit $S(z) := 1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non-nul. Montrer que $1/S$ est également développable avec un rayon non-nul.
   Indication : commencer par une analyse.

6.4.3 Séries entières, propriétés et contre-exemples

Exercice 91. **Rapport aux autres, encore**
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On note $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$.
On suppose que $S_n \to +\infty$ et que $a_n = o(S_n)$.

1. Montrer que $A(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $S(z) := \sum_{n\geq 0} S_n z^n$ ont rayon de convergence 1.
2. Relier les valeurs de $A(z)$ et $S(z)$ pour $|z| < 1$

Exercice 92. **Théorème taubérien, version très faible**
Soit $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série à coefficients positifs de rayon de convergence 1.

1. On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge. Montrer que $S(z) \to_{z\to 1^-} +\infty$.
2. On suppose maintenant que S est bornée sur $[0, 1[$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. En déduire que $\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n$ (x réel).
3. On étudie la série entière $P(z) := \sum_{n\geq 0} \sin(1/n) 2^n z^n$.
   (a) Déterminer son rayon de convergence R.
   (b) Que vaut $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} P(z)$?

Exercice 93.

1. Justifier que $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. f est-elle développable en série entière ? *Indication : regarder ses dérivées.*

Exercice 94.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2$ converge.

1. Donner le domaine de définition de $f(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{x-n}$.
2. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 95. Formule de Cauchy et théorème de Liouville

Soit $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. (a) Montrer que pour tout $0 < r < R$, on a $2\pi r^n a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta$.
   (b) En déduire que $|a_n| \leq \dfrac{\sup_{|z|=r}|S(z)|}{r^n}$.
2. On suppose maintenant que $R = +\infty$.
   (a) Montrer que si S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.
   (b) Montrer que si $\forall z \in \mathbb{C}, |S(z)| \leq P(|z|)$ pour P un polynôme de degré $\leq k$, alors S est un polynôme de degré $\leq k$.
   (c) Ces résultats restent-ils vrais si $R < +\infty$?
   Et si on n'a la majoration que sur $\mathbb{R}$?

6.4.4 Applications calculatoires

Exercice 96. Calculs de séries

1. Soit $\alpha > 0$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}$ comme somme d'une série.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 97. Calcul d'intégrale

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2(t))}{\sin^2(t)} = \pi(\sqrt{1+x}-1)$$

Exercice 98. Equivalent d'une intégrale

Pour $x \in]-1,1[$ on pose $f(x) := \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2(\theta)}}$.

1. Justifier que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ avec $a_n = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^2$
2. Montrer que $f(x) \sim_{1^-} -\frac{1}{2}\ln(1-x)$. *Indication : remplacer a_n par un équivalent.*

6.4.5 Applications combinatoires

Exercice 99. Détermination d'une suite

On pose $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Calculer les a_n en utilisant la série entière $S(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$. *Indication :* $S'(x) = S^2(x)$.

Exercice 100. Nombre de dérangements

On note D_n le nombre de permutations dans $\mathfrak{S}_n$ qui n'ont pas de point fixe (i.e. σ telle que pour tout k, $\sigma(k) \neq k$). On pose $D_0 = 1$ par convention.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $\sum_{k=0}^{n} D_k \binom{n}{k} = |\mathfrak{S}_n|$.
2. On considère la série $G(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$.

   Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, $G(x) = \frac{1}{1-x} e^{-x}$. *On justifiera aussi la convergence.*
3. En déduire que $D_n := n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 101. Nombres de Catalan

On appelle *chemin de Dyck* (de longueur n) une fonction $f : \{0, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ telle que $f(0) = f(n) = 0$ et $|f(k+1) - f(k)| = 1$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

1. (a) Dessiner l'allure du graphe d'un chemin de Dyck.

   (b) Démontrer qu'il n'existe pas de chemin de longueur impaire.

   (c) On note C_n le nombre de chemins de longueur $2n$. Justifier que $C_0 = C_1 = 1$. Expliciter les chemins de longueur 4 (puis 6) et en déduire C_2 (puis C_3).

   Montrer que pour tout $n > 0$, $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.
2. Notons $G(x) := \sum_{n \geq 0} C_n x^n$. Dans cette question (seulement), on fait l'hypothèse que son rayon de convergence est $R > 0$.

   (a) Montrer que $G(x) = 1 + xG(x)^2$.

   (b) En déduire que $G(x) = f(x)$ où $f : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.
3. (a) Justifier pourquoi f est développable $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec un rayon $\frac{1}{4}$.

   (b) Montrer que $a_n = C_n$. *Indication : danger !*

   (c) En déduire que $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

7 Equations différentielles linéaires

7.1 Equations à coefficients constants

Exercice 102. Echauffement

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 2y' + y = te^t$;
2. $y'' + y = \tan^2(t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
3. $t^2y'' - 2y = 3t^2$.

Exercice 103. Résolution générale

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à résoudre $y'' + y = g$.

1. On pose $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$.

   Montrer que f est deux fois dérivable et vérifie $f'' + f = g$.

   Indication : il y a trop de x pour le moment.
2. Résoudre $y'' + y = g$, en exprimant les solutions en fonction de f.
3. Application. Quelles sont les solutions si $g(t) = \cos(t)\sin(t)$?

7.2 Développements en série entière

Exercice 104.

Déterminer les séries entières convergentes au voisinage de 0 qui sont solution de $y'' + 2ty' + 2y = 0$. Simplifier l'expression des solutions paires.

Exercice 105.

Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$.
Indication : on commencera par chercher les solutions développables en série entière.

Exercice 106.

Développer en série entière sur $]-1, 1[$ la fonction $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$.
Indication : on introduira une équation différentielle d'ordre 2.

7.3 Equations non-linéaires

Exercice 107. Une équation de Bernoulli

On cherche les solutions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ de $y' = y + \sqrt{y}$ (B).

1. Montrer si f est solution de (B), alors $\sqrt{f}$ est solution de $2y' = y + 1$ (E).
2. Résoudre (E) et conclure.

Exercice 108. Equation d'Euler

On cherche les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que $f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t > 0$ (E) .

1. Monter que si f vérifie (E), alors elle est solution de $t^2y'' + y = 0$ (H).
2. Montrer que si f est solution de (H), alors $g := f \circ \exp$ vérifie une équation linéaire d'ordre 2 (H') que l'on précisera.
3. Résoudre (H') puis conclure.

7.4 Propriétés des solutions

Exercice 109. **Nombre fini de zéros**

On se place sur $I = [a, b]$ segment. Soit $q : I \to \mathbb{R}$ continue et f une solution non-nulle de $y'' + qy = 0$. Montrer que f s'annule en un nombre fini de points seulement.

Exercice 110. **Solutions bornées**

On se place sur $I = [0, +\infty[$ segment. Soit $q : I \to \mathbb{R}$ continue et intégrable.
On note (E) l'équation $y'' + qy = 0$.

1. Soit f une solution bornée de (E).
   (a) Démontrer que f' admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Que vaut cette limite ?
2. Soient f, g deux solutions bornées de (E). Que dire de la fonction $w = fg' - gf'$?
3. En déduire que f possède une solution non-bornée.

Exercice 111. **Solutions périodiques à l'ordre** 1

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et T-périodique.
On considère l'équation $(E) : y' + \alpha y = \phi$.

1. Montrer que f solution de (E) est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.
2. Montrer que (E) admet une unique solution T-périodique, sauf pour certaines valeurs de α à préciser.

8 Algèbre linéaire et réduction

8.1 Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 112. Projecteurs de même noyau

Soit E un espace vectoriel et p, q deux endomorphismes.

1. On suppose que p et q sont deux projecteurs de même noyau.
   Montrer que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. On suppose que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
   (a) Montrer que p et q sont des projecteurs.
   (b) Montrer que p et q ont même noyau.

Exercice 113. Inverse d'un côté

Soit E un espace vectoriel et f, g deux endomorphismes tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

1. On suppose la dimension de E finie. Montrer que f est un isomorphisme.
2. On ne fait plus d'hypothèses sur la dimension de E.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$, puis $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. Donner un exemple où ni f ni g ne sont des applications bijectives.
   Expliciter $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$ et $g \circ f$.

Exercice 114. Propriété universelle du quotient

Soit $E = F \oplus G$ un espace vectoriel et p la projection sur G parallèlement à F. Soit E' un autre espace et $f : E \to E'$ tel que $F \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : G \to E'$ telle que $\widetilde{f} \circ p = f$.
2. Montrer que $\widetilde{f}$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = F$.
3. Quand est-elle surjective ?

Exercice 115. Propriété universelle du coproduit

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
   On pose $\iota_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times F \\ a & \longmapsto & (a, 0_F) \end{array}$ et $\iota_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \times F \\ b & \longmapsto & (0_E, b) \end{array}$.
   Montrer que ι_E et ι_F sont linéaires et injectives. Quand a-t-on surjectivité de ι_E ?
2. Soit G un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel et deux applications linéaires $g_E : E \to G$ et $g_F : F \to G$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $h : E \times F \to G$ telle que $h \circ \iota_E = g_E$ et $h \circ \iota_F = g_F$.

8.2 Déterminants

Exercice 116. Déterminant de Hurwitz

Soient $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $\begin{pmatrix} a+\lambda_1 & a & \dots & a \\ a & a+\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+\lambda_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $\det(H) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + a \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \lambda_j$.

Exercice 117. Déterminants de Smith

1. Soit $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ une fonction, on note $a_{i,j} := \sum_{k|i \text{ et } k|j} \psi(k)$ et A la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

   Montrer que $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \psi(k)$. *Indication : écrire A comme un produit de matrices.*
2. Utiliser ce résultat pour en déduire $\det(A)$ dans les cas suivants :
   (a) $a_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j ;
   (b) $a_{i,j}$ est la somme des diviseurs communs à i et j ;
   (c) $a_{i,j} = i \wedge j$. *Indication : Euler.*

Exercice 118. Déterminant de Cauchy (par des fractions rationnelles)

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$.
On note $C_n = \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ et on cherche à calculer son déterminant.

1. On suppose qu'il existe $i \neq j$ tels que $a_i = a_j$. Que vaut $\det(C_n)$?
2. Dans la suite on suppose les a_i tous distincts.
   (a) Soit $R(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - X)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i + X)}$.
   Expliciter les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ de sa décomposition en éléments simples $R(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i+X}$.
   (b) Justifier que $\det(C_n) = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \dots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$.
   On pratiquera des opérations élémentaires sur la dernière ligne.
   (c) En déduire par récurrence que $\det(C_n) = \dfrac{\prod_{1 \leq i<j \leq n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} a_i + b_j}$.

8.3 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 119. Polynôme de l'inverse

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ inversible.
Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Exercice 120. Polynôme conducteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un polynôme P_x unitaire de degré minimal tel que $P_x(f)(x) = 0$. Justifier que $P(f)(x) = 0$ si et ssi $P_x | P$, et en déduire que P_x est unique.
2. Dans la suite on note $E_x = \{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$. Relier P_x à la dimension de E_x.
3. Soient $x, y \in E$ tels que $E_x \cap E_y = \{0\}$.
   (a) Montrer que $P_x | P_{x+y}$ et $P_y | P_{x+y}$.
   (b) Montrer que $P_{x+y} | P_x \vee P_y$ et conclure que $P_{x+y} = P_x \vee P_y$.
4. Soient $x, y \in E$ tels que P_x et P_y sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que E_x et E_y sont en somme directe.
   (b) Montrer que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.
5. Soit Q un facteur irréductible de π_f de multiplicité m. Trouver $x \in E$ tel que $P_x = Q^m$.
   Indication : on cherchera x dans $\mathrm{Ker}(Q^m)(f)(x)$ *et on décomposera les noyaux.*
6. Conclure qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_f$.

8.4 Éléments propres

Exercice 121. Valeurs propres d'endomorphismes matriciels

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs propres de $\phi_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto AM$

Exercice 122. Disques de Gershgörin et matrices stochastiques

Soit $A := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note $r := \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
   Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq r$.
2. On suppose maintenant que $\forall i, j, a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module au plus 1, et que cette valeur est atteinte.

Exercice 123. Théorème de Perron

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.
Si $X = (x_i)_i, Y = (y_i)_i \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs, on notera $X \geq Y$ si $\forall i, x_i \geq y_i$.

1. Soit $\mathcal{P} := \{X \in \mathbb{R}^n \mid X \geq 0 \text{ et } \sum_i x_i = 1\}$. Soit $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists X \in \mathcal{P}, AX \geq \lambda X\}$.
   (a) Montrer que Λ est non-vide et majoré.
   (b) Montrer que sa borne supérieure λ_0 est une valeur propre de A.
   Indication : on pourra utiliser la compacité de $\mathcal{P}$, puis regarder $Y := AX$.
   (c) Montrer que $\lambda_0 > 0$.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leq \lambda_0$.
3. On suppose que λ est une valeur propre telle que $\lambda_0 = |\lambda|$.
   (a) En considérant les valeurs propres de la matrice $A - \delta I_n$ pour $\delta > 0$ bien choisi, justifier que $|\lambda - \delta| \leq \lambda_0 - \delta$.
   (b) En déduire que $\lambda_0 = \lambda$.

8.5 Diagonalisation, trigonalisation

Exercice 124. Diagonalisabilité du rang 1

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.
2. Montrer que si f n'est pas diagonalisable, alors $f^2 = 0$.

Exercice 125. Matrices de matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $B := \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$ qu'on suppose diagonalisable.

En étudiant la forme de $P(B)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que A est nulle.

Exercice 126. Commutant d'un endomorphisme

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{C}(f) := \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

1. Si f est scalaire, rappeler la dimension de $\mathcal{C}(f)$.
2. Si f est diagonalisable, déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$.
   Indication : on étudiera les sous-espaces propres de f.
3. On suppose que toutes les valeurs propres de f sont distinctes. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est l'ensemble des polynômes en f.

Exercice 127. Traces des puissances

1. Montrer qu'une matrice complexe est nilpotente si et seulement si ses valeurs propres sont toutes nulles.
2. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall p \geq 0, \mathrm{tr}(A^p) = 0$. Montrer que A est nilpotente.

8.6 Equations matricielles

Exercice 128.

Soit la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Combien y a-t-il de solutions $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $M^2 = A$?
3. A-t-on des solutions dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 129.

On cherche les matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\exists \alpha \in \mathbb{C}, A + {}^t\mathrm{com}(A) = \alpha I_n$. (E)

1. Que dire si $n = 2$?
2. Dans la suite on suppose $n \geq 3$.
   (a) Montrer que si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$.
   (b) Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $A + {}^t\mathrm{com}(A) = \alpha I_n$, alors il en est de même pour toute matrice semblable à A.

3. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est non-diagonalisable, mais possède une seule valeur propre. Montrer que A vérifie (E) si et seulement si $A = \lambda I_n + N$ avec $\lambda^{n-2} = 1$ et $N^2 = 0_n$. *Indication : faire apparaître un polynôme annulant A.*
4. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède au moins deux valeurs propres distinctes et vérifie (E). Montrer que A est diagonalisable et conclure.

8.7 Exponentielle matricielle

Exercice 130.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_n + \dfrac{A}{n}\right)^n$.

Exercice 131. Sous-groupe à un paramètre

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ dérivable en 0 et tel que $\forall t, t' \in \mathbb{R}, \varphi(t+t') = \varphi(t)\varphi(t')$.

1. Montrer que ϕ est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \varphi(t)\varphi'(0)$.
2. Déterminer tous les φ vérifiant les conditions du début de l'exercice.

8.8 Equations différentielles vectorielles

Exercice 132. Demi-Dunford et application

1. Soit $n \geq 1$ et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, on appelle son *indice* p le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $N^k = 0$.
   (a) Montrer que $p \leq n$.
   (b) Montrer que la famille $N^0, \dots, N^{p-1}$ est libre.
   (c) Expliciter $\exp(\lambda I_n + N)$.
2. Soit A une matrice possédant une unique valeur propre λ.
   Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in i\mathbb{R}$.
3. (a) Soit A de polynôme caractéristique $\prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
   Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$.
   (b) En déduire l'existence d'une base où A est diagonale par blocs, telle que chaque bloc ait une seule valeur propre.
4. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions du système différentiel $X' = AX$ soient toutes bornées.

9 Algèbre préhilbertienne

9.1 Produit scalaire, orthogonalité

Exercice 133. Presque l'identité

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $a \in E$ tel que $||a||_2 = 1$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : E \to E, x \mapsto x + \alpha\langle a|x\rangle a$.

1. Que vaut $f_\alpha \circ f_\beta$?
2. Quand f_α est-elle bijective ?
3. Quels sont les éléments propres de f_α ? Est-elle (ortho-)diagonalisable ?

Exercice 134. Adhérence

1. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace. Montrer que $\overline{F}^\perp = F^\perp$.
2. Dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\displaystyle\int_0^1 fg$, quel est l'orthogonal du sous-espace des polynômes ?

Exercice 135. Matrices de Gram

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Si $x_1, \ldots, x_n \in E$, on note $M(x_1, \ldots, x_n) := (\langle x_i|x_j\rangle)_{1\le i,j\le n}$.

1. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ est liée alors $M(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas inversible.
2. On note $G(x_1, \ldots, x_n) := \det(M(x_1, \ldots, x_n))$.
   (a) Soit $F := \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $x \in E$.
   Montrer que $d(x, F)^2 G(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n, x)$.
   Indication : on se souviendra que $||x||^2 = \ldots$ et on regardera la dernière colonne.
   (b) En déduire que si $x_1, \ldots, x_n$ est libre, alors $M(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible.
   (c) Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de $F \subseteq E$ et $x \in E$.
   Justifier que $d(x, F)^2 = \dfrac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$.
3. Application. On suppose E de dimension n et soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des vecteurs de norme 1 tels que $\langle x_i|x_j\rangle = \alpha$ pour $i \neq j$.
   Montrer que $\alpha = -\frac{1}{n}$ ou $\alpha = 1$.

Exercice 136. Inégalité de Hadamard

On note $||\cdot||$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $M =: (X_1|\cdots|X_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes $X_1, \ldots, X_n$ sont libres.
   (a) Justifier que $\det(M) = \det(N)$ si $N := (Y_1|\cdots|Y_n)$, où $Y_1, \ldots, Y_n$ est l'ortho*gonalisé*[2] de Gram-Schmidt de $X_1, \ldots, X_n$.
   (b) Justifier que $\det({}^tNN) = \prod_{i=1}^n ||Y_i||^2$.
   (c) En déduire que $|\det(M)| \le \prod_{i=1}^n ||X_i||$.
   (d) Justifier qu'il y a égalité si et seulement si les X_i sont deux-à-deux orthogonaux.

2. On ne cherchera pas à ortho*normaliser*.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $c > 0$ tels que, $\forall i, j, |a_{i,j}| \leq c$.
   Montrer que $|\det(A)| \leq c^n n^{n/2}$.

Exercice 137. Famille obtusangle

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\mathcal{F} := x_1, \ldots, x_n$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs telle que $\forall i \neq j$, $\langle x_i | x_j \rangle < 0$.

1. Montrer que toute sous-famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.
   Indication : on pourra raisonner par récurrence et introduire un projeté.
2. A-t-on un exemple de telle famille dans le plan euclidien ? Dans l'espace euclidien ?

9.2 Projetés orthogonaux, minimisation

Exercice 138. Projetés et supplémentaires

Soit $E := \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que ϕ munit E d'un produit scalaire.
2. Soit $V := \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\}$.
   Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W. *Indication : quels sont les éléments de W ?*

9.3 Endomorphismes orthogonaux

Exercice 139.

1. Justifier que $\phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
2. A quelle condition sur A l'endomorphisme $M \mapsto AM$ est-il dans orthogonal (pour ϕ) ?

Exercice 140. Stabilité de l'orthogonal

Soit E euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ l'est.

9.4 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Exercice 141. Identité, opposé, retournement et réflexion

Soit $M := \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. À quelles conditions a-t-on $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$?
2. Quelle est dans chaque cas la nature de M (forme diagonale, etc.) ?

Exercice 142. Valeurs singulières

On note $||\cdot||$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note $|||A||| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$. Justifier que $|||\cdot|||$ est bien définie et munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme.

2. Si $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale, montrer que $|||D|||^2 = \sup_i \lambda_i^2$.
3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer que $|||A|||^2 = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)\}$.
   Indication : on fera apparaître une matrice diagonale.

Exercice 143. Projetés et minimisation

On définit $\phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que ϕ est bien définie et munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire.
2. Que vaut $\phi(X^p, X^q)$.
3. Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - at + b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 144. Minimisation

Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{1} t^2(\ln(t) - at - b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 145. Décomposition polaire

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXSX \geq 0$.
   (b) On suppose que $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique $R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$ et $\mathrm{Sp}(R) \subseteq \mathbb{R}_+$.
   Indication : pour l'unicité on remarquera que R et S commutent.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$ et $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+$.
3. (a) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : considérer $A + \delta I_n$.*
   (b) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$ et $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+$. A-t-on toujours unicité de ce couple ?

10 Calcul différentiel

10.1 Etude de régularité

Exercice 146. Demi-plans

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ si $|x| > |y|$; y si $|y| > |x|$; 0 si $|x| = |y|$.

1. Etudier les points de continuité de f. *On fera aussi un dessin*
2. Etudier l'existence des dérivées partielles de f.

Exercice 147. Recollement

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 sinon.

1. Etudier la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. En comparant $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

10.2 Calculs de différentielles et dérivées classiques

Exercice 148. Différentielle de l'inversion

On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (muni du produit scalaire usuel) l'involution inverse $f : x \mapsto \dfrac{x}{||x||^2}$.

Calculer la différentielle de f.

Exercice 149. Différentielle du déterminant

On note det le déterminant sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que det est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $D\det(I_n).H = \mathrm{tr}(H)$.
2. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $D\det(M).H = \mathrm{tr}({}^t\,\mathrm{com}(M)H)$.
3. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, montrer que $D\det(M).H = \mathrm{tr}({}^t\,\mathrm{com}(M)H)$.
4. (a) Soit $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue, $y_1, \dots, y_n$ des solutions de $y' = A(t)y$ et $w : t \mapsto \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$. Montrer que $w'(t) = \mathrm{tr}(A(t))w(t)$.
   On remarquera que si $Y = (y_1|\dots|y_n)$ (colonnes) alors $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

   (b) En déduire $\det(\mathrm{e}^{tM})$ pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 150. Coordonnées polaires

Soit $D = \{(x, 0 \mid x \geq 0\}$.

On considère l'application $\phi : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$.

1. Montrer que ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont l'inverse est $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soient f, g de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(x, y) = g(r, \theta)$, au sens où $f \circ \phi = g$.
   Exprimer les dérivées partielles de g et en fonction de celles de f.

10.3 Divers

Exercice 151. Encadrement

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g, h : U \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in U$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. On suppose que $f(a) = g(a)$ et que f, g sont différentiables en a.

Montrer que h est différentiable en a. Que vaut cette différentielle ?

Exercice 152.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{|f(x)|}{||x||} \to_{||x|| \to +\infty} +\infty$. On veut montrer que $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est surjective. Supposons le contraire par l'absurde.

1. (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g : x \mapsto f(x) - \langle a|x \rangle$ n'a pas d'extremum.
   (b) Justifier que $\sup g(\mathbb{R}^2) = +\infty$ et $\inf g(\mathbb{R}^2) = -\infty$.
2. Pour $r > 0$ soit $E_r = \mathbb{R}^2 \setminus B(0, r)$. Démontrer que $\forall r > 0, \exists x \in E_r$ tel que $g(x) = 0$. Conclure à une contradiction.

Exercice 153. Lois de groupe sur $\mathbb{R}$

Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$, de neutre e. On suppose que $f : x, y \mapsto x \star y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on note $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ ses dérivées partielles.

1. (a) Montrer que $\forall x, y$, $\partial_2 f(x \star y, e) = \partial_2 f(x, y) \partial_2 f(y, e)$.
   Indication : on pourra dériver l'associativité de $\star$.
   (b) Justifier que $\partial_2 f(y, e) > 0$. *Indication : montrer que $\partial_2 f(e, e) = 1$.*
2. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective de classe $\mathcal{C}^1$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^1$ (on parle de $\mathcal{C}^1$-*difféomorphisme*) telle que $\forall x, y, \phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y)$.
   Démontrer que $\phi(x) = a \displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t, e)}$ où a est une constante.
3. Soit $a \neq 0$. Montrer que $\phi : x \mapsto a \displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t, e)}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\forall x, y, \phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y)$.
4. Conclure que $\star$ est commutative.

Exercice 154. Rotations affines

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation.

1. Justifier que $\mathrm{Jac}(f)(x, y)$ s'écrit $\begin{pmatrix} c(x, y) & -s(x, y) \\ s(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix}$ avec $c(x, y)^2 + s(x, y)^2 = 1$.
2. Démontrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont tout deux orthogonaux à $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux l'un à l'autre.
4. En déduire que $\mathrm{Jac}(f)$ est une rotation constante.

11 Probabilités

11.1 Définitions : espaces, tribus, variables aléatoires

Exercice 155. Observation des singletons

Soit Ω un ensemble et $\mathfrak{A} := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ ou } \overline{A} \text{ est dénombrable}\}$.

1. Montrer que $\mathfrak{A}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathfrak{A}$ est la plus petite tribu (pour l'inclusion) contenant les singletons.
3. Que dire de $\mathfrak{A}$ si Ω est dénombrable ?

Exercice 156. Tribus infinies d'un ensemble dénombrable

Soit Ω un ensemble infini dénombrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω (et $\forall n \geq 0, A_n \neq \varnothing$).

On pose $\mathfrak{A} := \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n \;\middle|\; T \subseteq \mathbb{N} \right\}$.

1. Démontrer que $\mathfrak{A}$ est une tribu.
2. Soit $\mathfrak{T}$ une tribu infinie. Montrer que $\mathfrak{T}$ est de la forme $\mathfrak{A}$ ci-dessus pour une famille $(A_n)_{n\geq 0}$. *Indication : considérer le plus petit élément de $\mathfrak{T}$ contenant $x \in \Omega$.*
3. Existe-t-il des tribus infinies dénombrables sur Ω ?

Exercice 157. Indice aléatoire

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Démontrer que $Y : \omega \mapsto X_{N(\omega)}(\omega)$ est une variable aléatoire discrète.

11.2 Lois usuelles, modélisation

Exercice 158. Min et max géométriques

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$, où $p, q \in]0, 1[$ deux variables indépendantes.
Soit $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi conjointe de U et V.
2. En déduire que $U \sim \mathcal{G}(p + q - pq)$.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 159. Paradoxe des trois pièces de monnaie

On lance trois pièces de monnaie équilibrées (indépendamment). On cherche p la probabilité que toutes retombent du même côté.

1. Deux pièces tombent nécessairement du même côté. En étudiant le côté de la dernière pièce, expliquer "avec les mains" pourquoi $p = \frac{1}{2}$.
2. Peut-on retrouver ce résultat en énumérant toutes les possibilités de tirages ?
3. Qu'en déduire ? [3]

3. A part que $2 = 4$.

11.3 Covariance

Exercice 160. Matrice de covariance

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles ayant une variance.
On note $M = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $C \in \mathbb{R}^n$, montrer que ${}^tCMC \ge 0$.
2. Que dire des valeurs propres de M ?

Exercice 161. Régression linéaire

Soient X, Y deux VA réelles admettant une variance. On suppose que $\mathbb{V}[X] > 0$.
Quelle est la valeur de $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant $\mathbb{E}[(Y - (aX + b))^2]$?

11.4 Séries génératrices

Exercice 162.

Soit X une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$ avec $a > 0$ et $p \in]0, 1[$.
Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 163. Processus de Galton-Waston

1. Soit X une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$, de génératrice G_X, telle que $m := \mathbb{E}[X] < +\infty$.
   (a) Montrer que $m = \lim_{s \to 1^-} \frac{G_X(1) - G_X(1)}{1-s}$. *Indication : simplifier le numérateur.*
   (b) On suppose $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) < 1$. Montrer que G_X est strictement convexe.
2. Soient $(X_{n,k})_{n,k \ge 0}$ des VAIID de même loi que X (on garde les hypothèses sur X).
   On définit $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$. Démontrer que $G_{Z_n} = (G_X)^n = G_X \circ \cdots \circ G_X$.
3. Montrer que $r := \mathbb{P}[\bigcup_{n \ge 0}(Z_n = 0)]$ est le plus petit point fixe de G_X.
4. (a) On suppose $m > 1$, montrer que $r \in [0, 1[$.
   Etablir ensuite que $r = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.
   (b) On suppose que $m < 1$, montrer que $r = 1$.
   On pourra accompagner ces réponses de dessins illustrant la demi-tangente en 1.

Exercice 164. Fonction génératrice des moments

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $M_X : t \mapsto \mathbb{E}[\exp(tX)]$.

1. Déterminer M_X (et son domaine de définition) si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson).
2. On suppose que M_X est définie sur un voisinage $]-a, a[$ de 0.
   Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $]-a, a[$. Que dire de $M^{(k)}(0)$?